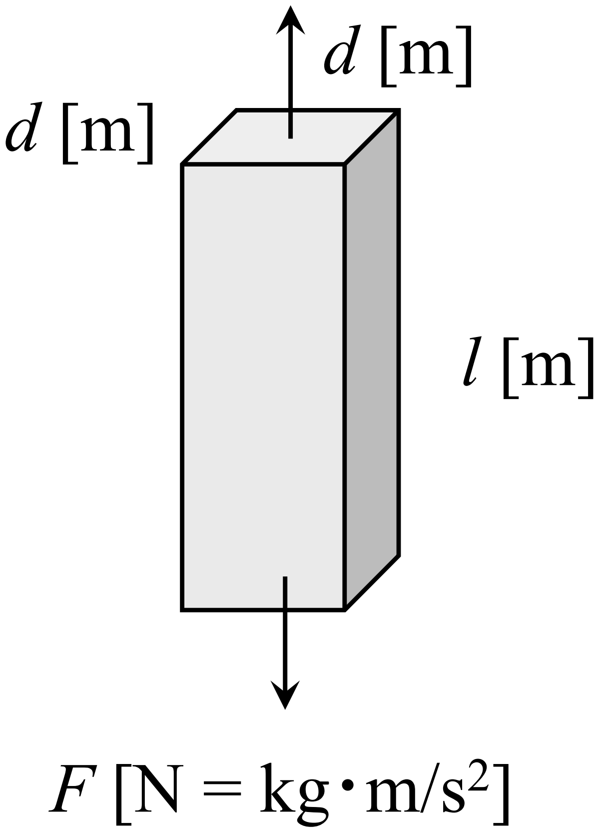
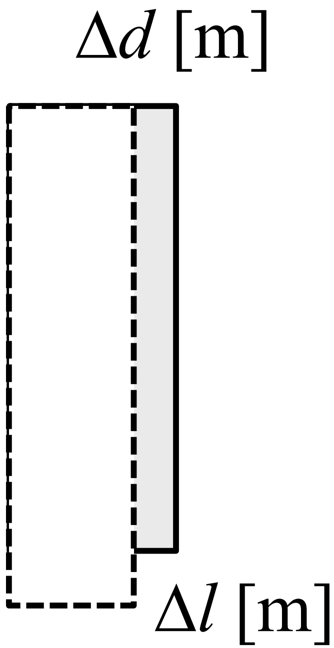
# 5. 材料力学

## 垂直応力・垂直歪




垂直応力

$$\sigma = \frac{F}{d^2} \, [\mathrm{Pa} = \mathrm{N/m^2}]$$

垂直歪

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l} \qquad \varepsilon_d = \frac{\Delta d}{d}$$

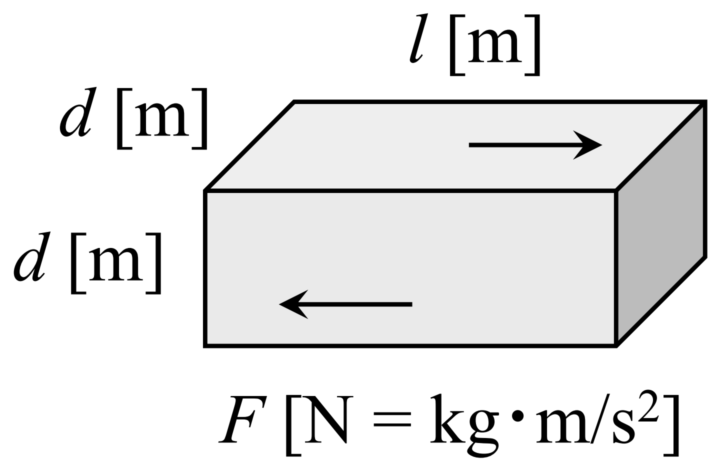
フックの法則

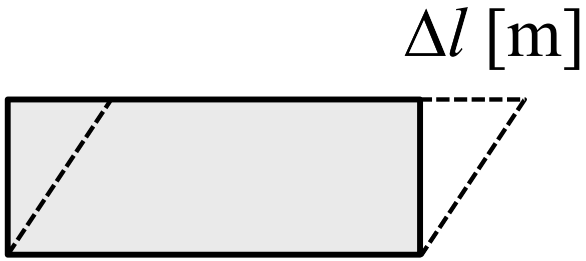
$$\varepsilon_l = \frac{1}{E}\sigma \qquad \varepsilon_d = -\frac{\nu}{E}\sigma$$

（$E$: ヤング率，　$\nu$：ポアソン比）

# 5. 材料力学

## 剪断応力・剪断歪




剪断応力

$$\sigma = \frac{F}{dl}\,[\mathrm{Pa} = \mathrm{N/m^2}]$$

剪断歪

$$\gamma = \frac{\Delta l}{l}$$

フックの法則

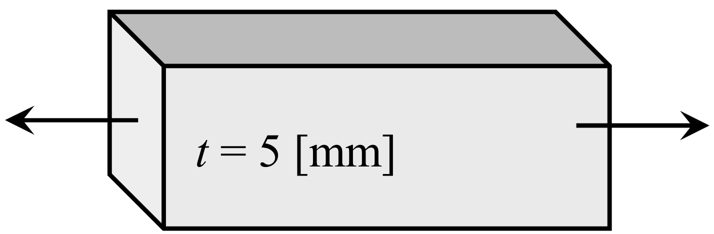
$$\gamma = \frac{1}{G}\sigma \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

（$G$: 剪断弾性定数）

# 5. 材料力学

【問題⑧】長さ$l$ = 3000 mm, 幅$w$ = 10 mm, 厚さ$t$ = 5 mm, ヤング率$E$ = 200 GPa, ポアソン比0.3の直方体の長さ方向に力$F$ = 20 kNを加えて、弾性変形させた。
(1) 公称垂直応力$\sigma$, 公称垂直歪$\varepsilon$を求めよ。
(2) 長さ, 幅, 厚さの変化量$\Delta l$, $\Delta w$, $\Delta t$を求めよ。

【正解】




(1) 公称垂直応力

$$\sigma = \frac{20\times10^{3}}{5\times10^{-3}\times10\times10^{-3}}$$

$$= 400\times10^{6}\ [\mathrm{Pa}] = 400\ [\mathrm{MPa}]$$

公称垂直歪

$$\varepsilon = \frac{400\times10^{6}}{200\times10^{9}} = 2\times10^{-3}$$

# 5. 材料力学

【正解の続き】

(2) $\Delta l = \varepsilon \times l = 2 \times 10^{-3} \times 3000 \times 10^{-3}$

$= 6 \times 10^{-3}\ [\mathrm{m}] = 6\ [\mathrm{mm}]$

$\Delta w = -\nu \times \varepsilon \times w = -0.3 \times 2 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3}$

$= -6 \times 10^{-6}\ [\mathrm{m}] = -6\ [\mu\mathrm{m}]$

$\Delta t = -\nu \times \varepsilon \times t = -0.3 \times 2 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-3}$

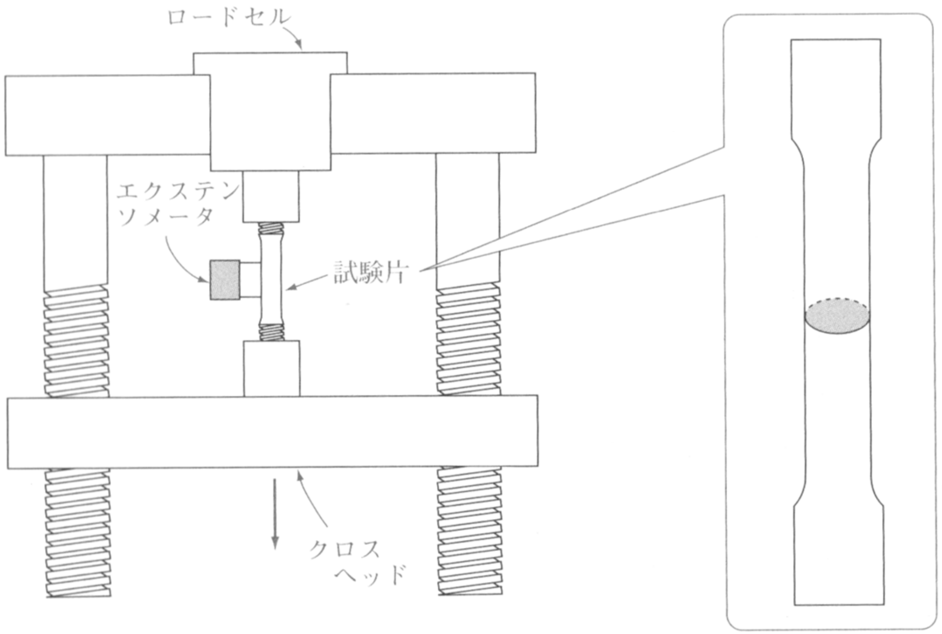
$= -3 \times 10^{-6}\ [\mathrm{m}] = -3\ [\mu\mathrm{m}]$

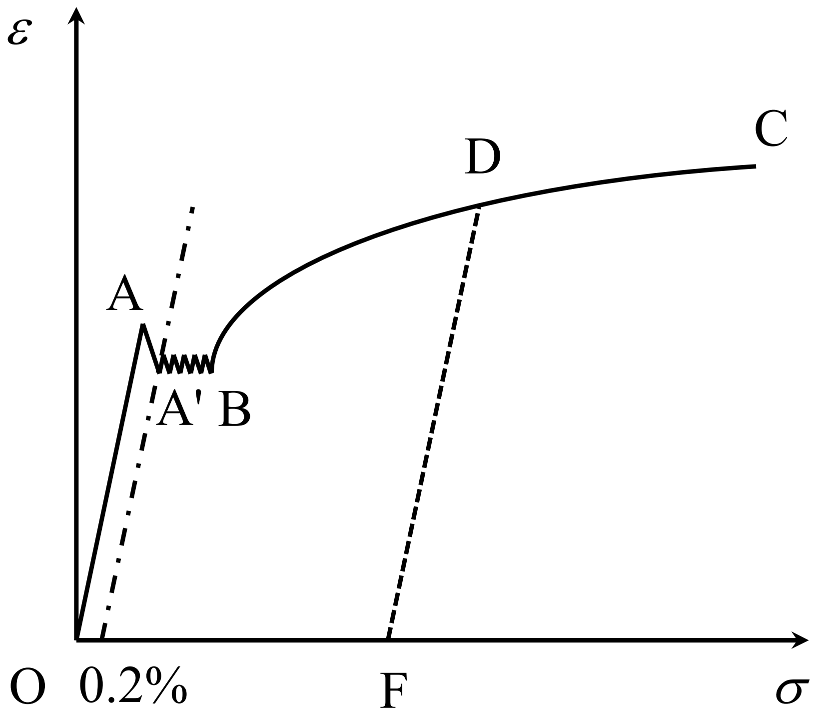
微小変位すると断面積や長さが僅かに変化

→ これらを考慮した応力，歪：真応力，真歪

# 5. 材料力学

## 応力ー歪曲線




O–A：弾性変形（傾き$E$）

A：上降伏点　　A'：0.2%耐力

B：下降伏点

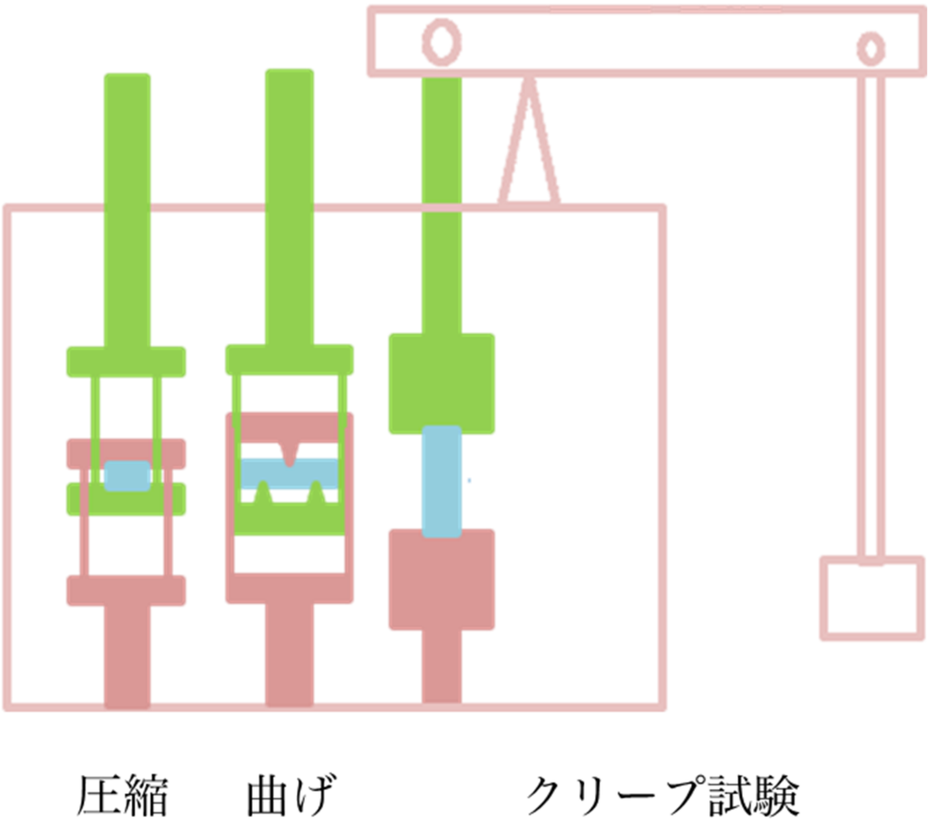
A–C：塑性変形

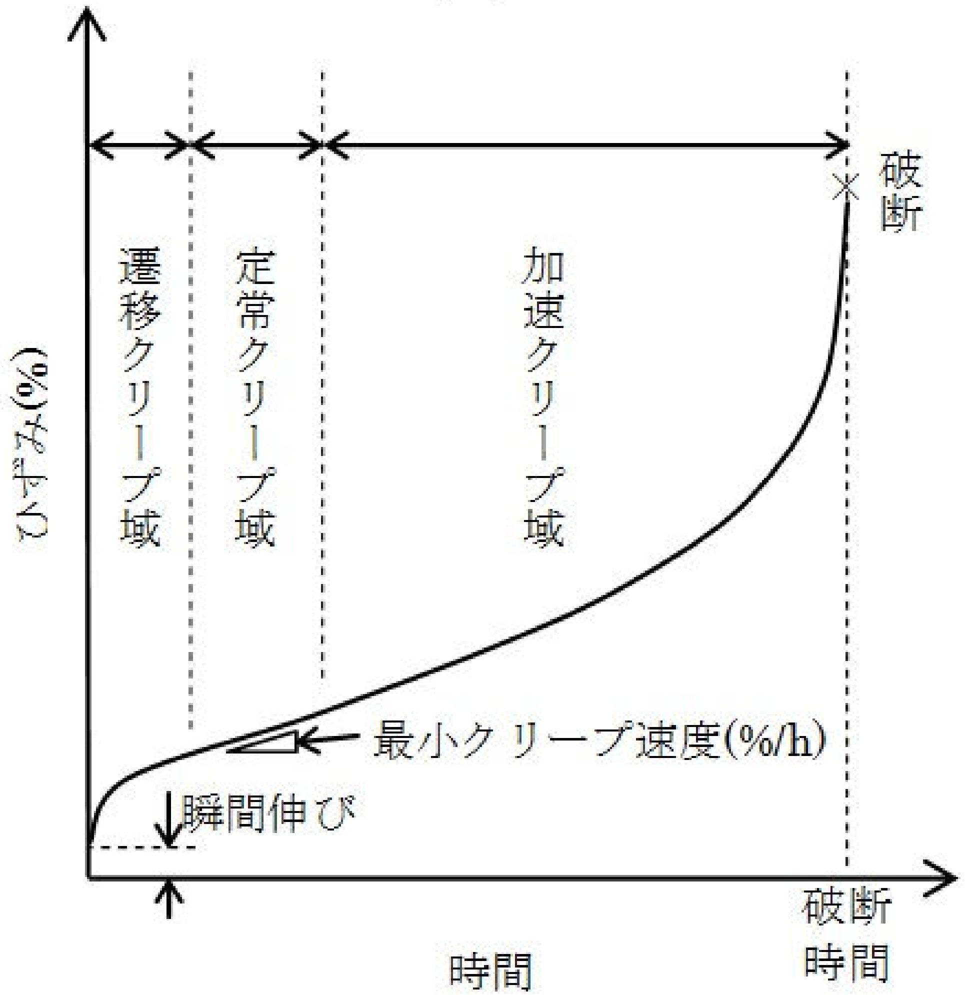
C：破断点

F：永久歪（Dで除荷）

# 5. 材料力学

## クリープ

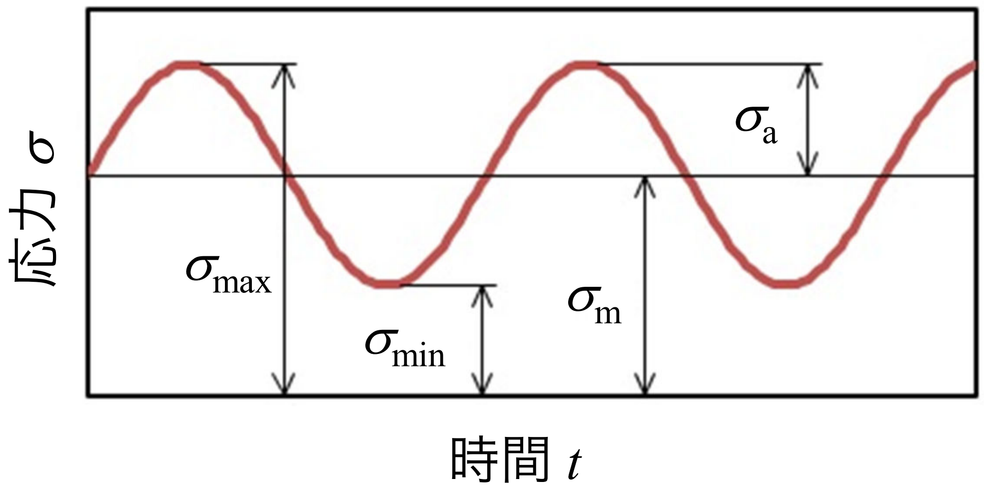


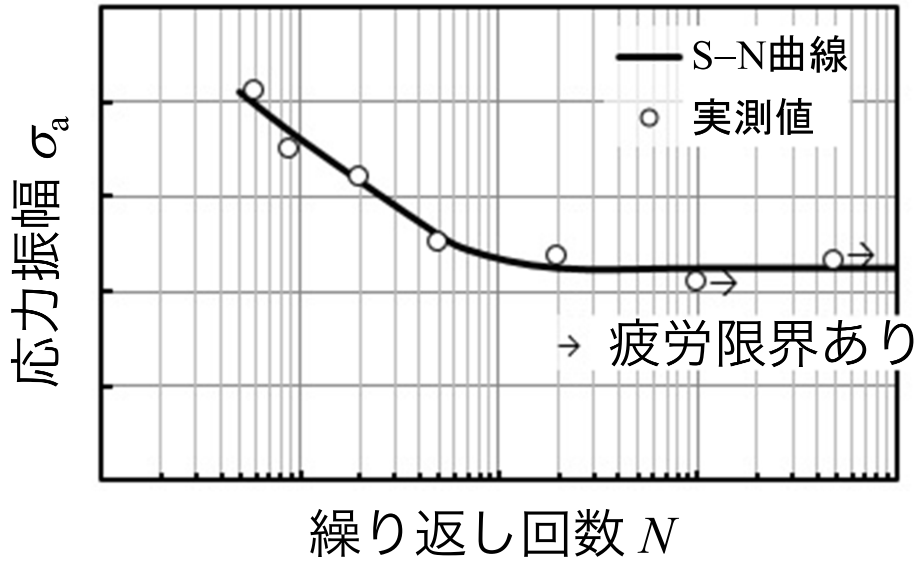

〔ひずみ－時間線図〕

# 5. 材料力学

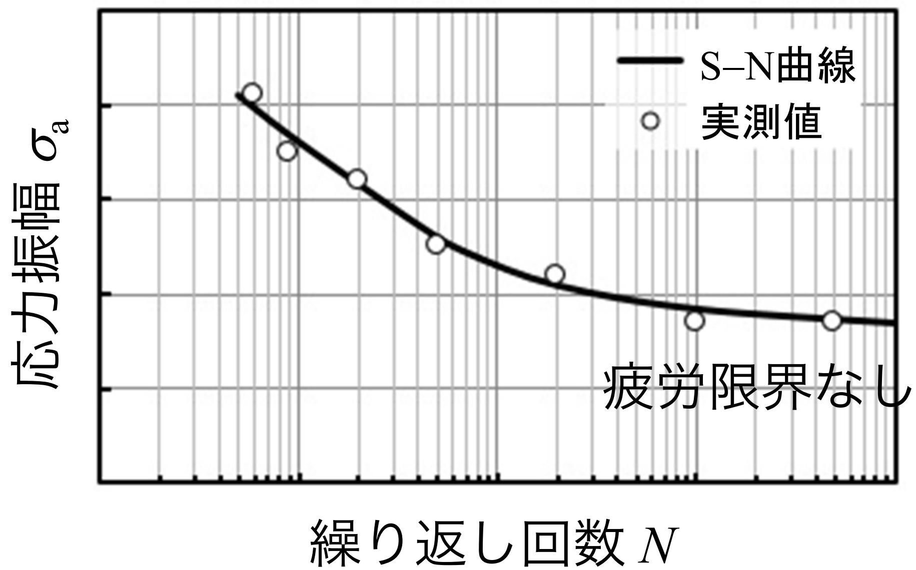
## 疲労



応力 σ
σa
σmax
σmin
σm
時間 t

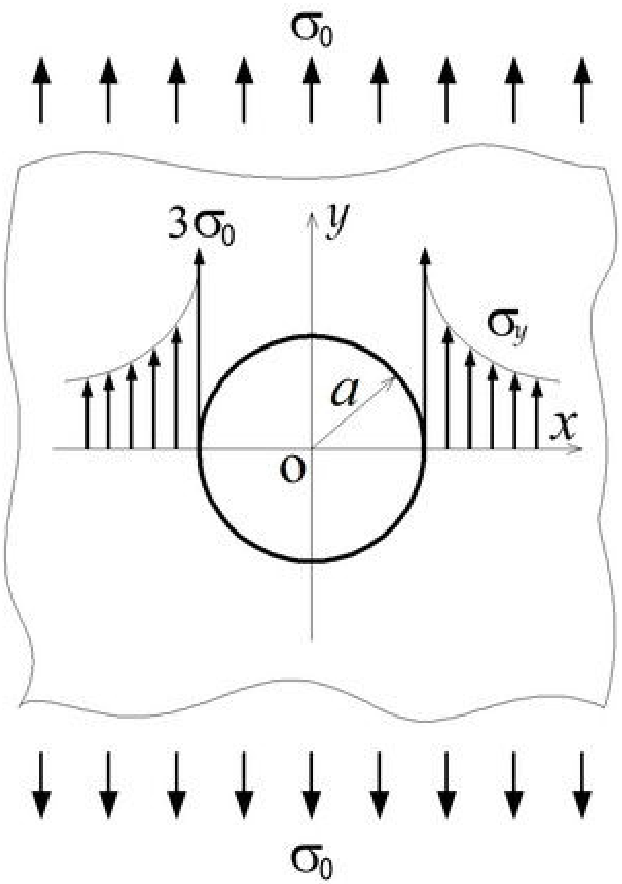
S–N曲線
実測値
疲労限界あり
応力振幅 σa
繰り返し回数 N

S–N曲線
実測値
疲労限界なし
応力振幅 σa
繰り返し回数 N

# 5. 材料力学

## 応力集中




中央に円孔が空いた材料

$$\sigma_{y\to\infty} = \sigma_0$$

円孔の中心からの距離 $x$ における $y$ 方向の応力 $\sigma_y$

$$\sigma_y = \sigma_0\left(1 + \frac{a^2}{2x^2} + \frac{3a^4}{2x^4}\right)$$

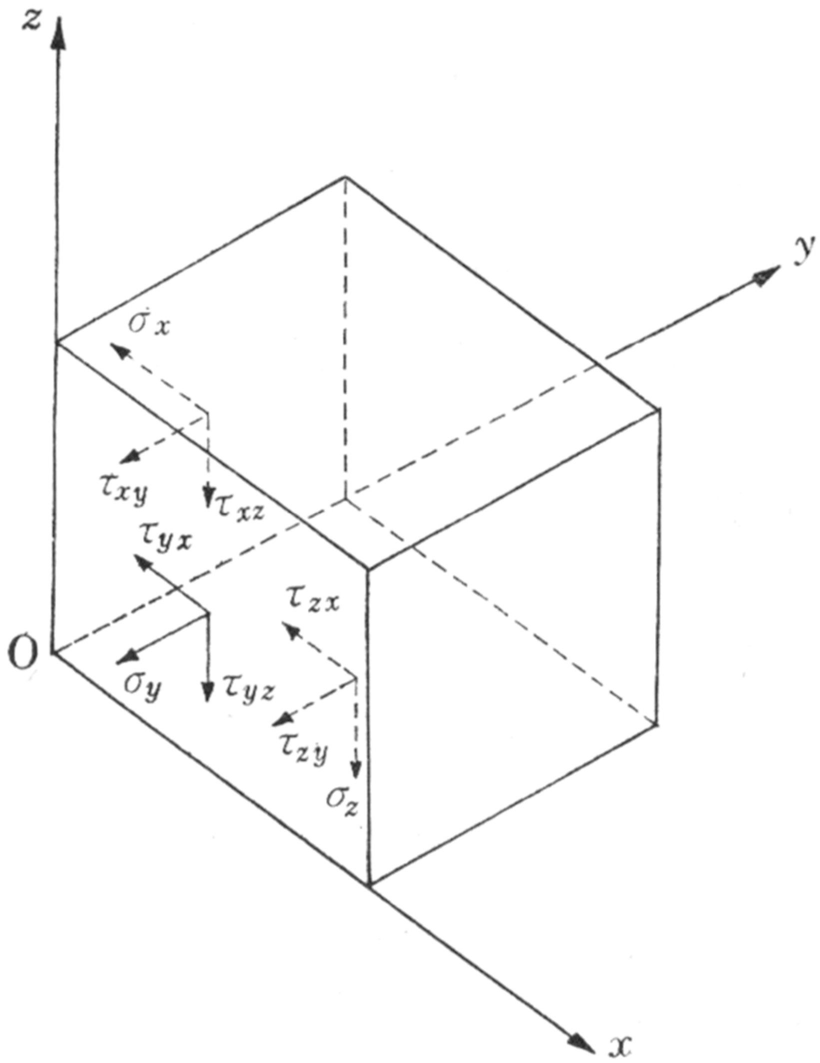
$x = a$ で最大応力

$$\sigma_{y,\max} = 3\sigma_0$$

$$K = \frac{\sigma_{y,\max}}{\sigma_0} = 3$$ ：応力集中係数

# 5. 材料力学

## 一般化されたフックの法則



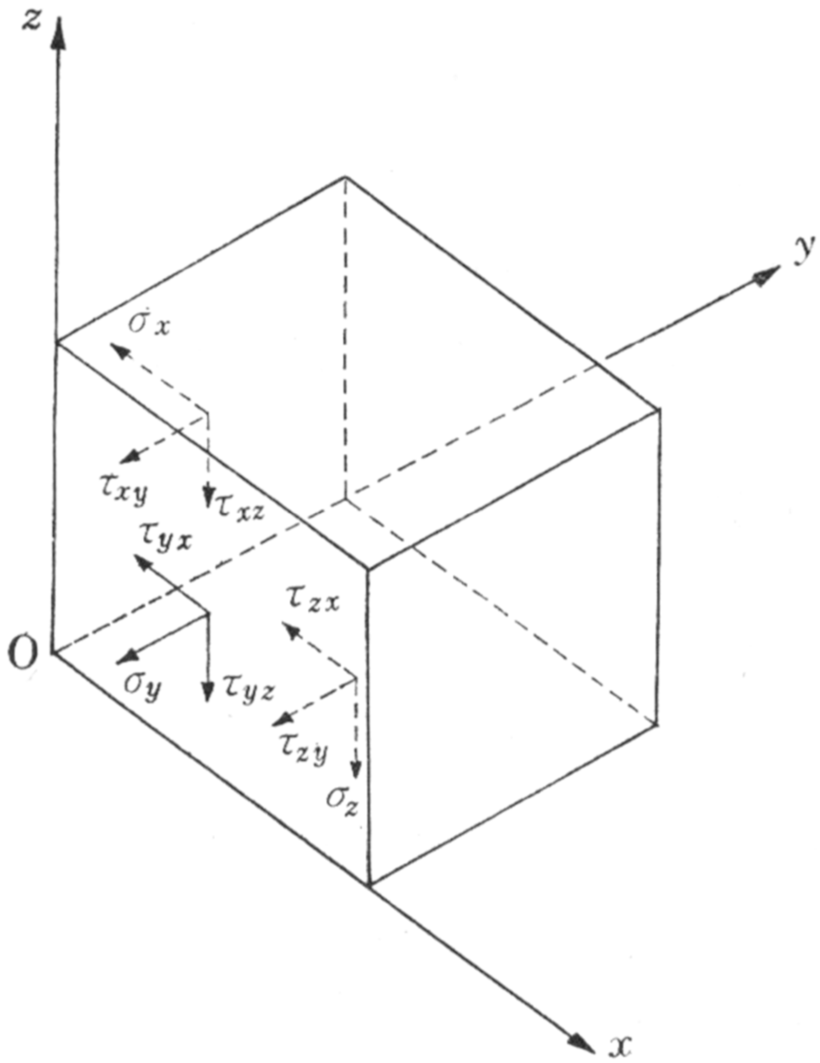

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_x$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\sigma_y \qquad \varepsilon_z = \varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_y$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z \qquad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_z$$

# 5. 材料力学

## 一般化されたフックの法則




$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\{(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\{(\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\{(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{zx}$$

# 5. 材料力学

剪断応力がゼロになる座標軸の応力，歪

主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

主歪 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

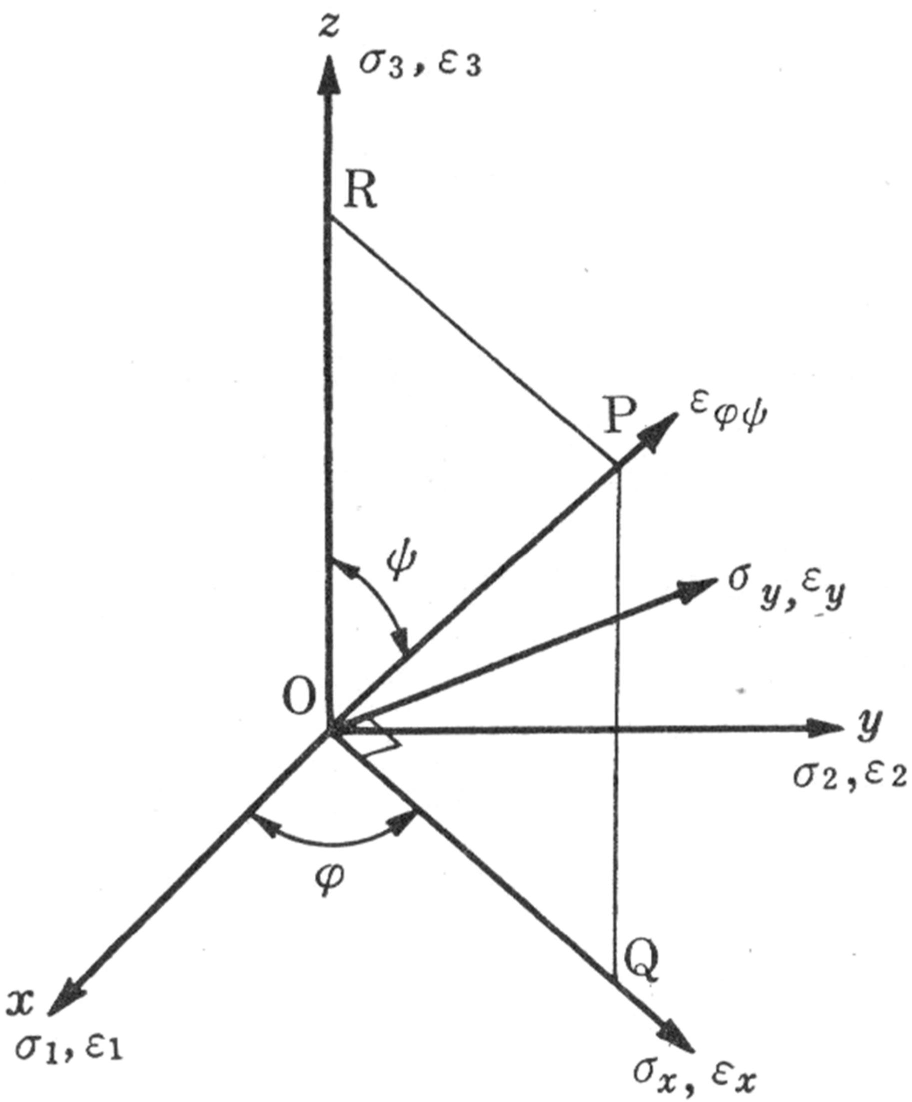
$z$ 方向の応力 $\sigma_z = \sigma_3 = 0$ の平面応力を仮定

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \qquad \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \qquad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

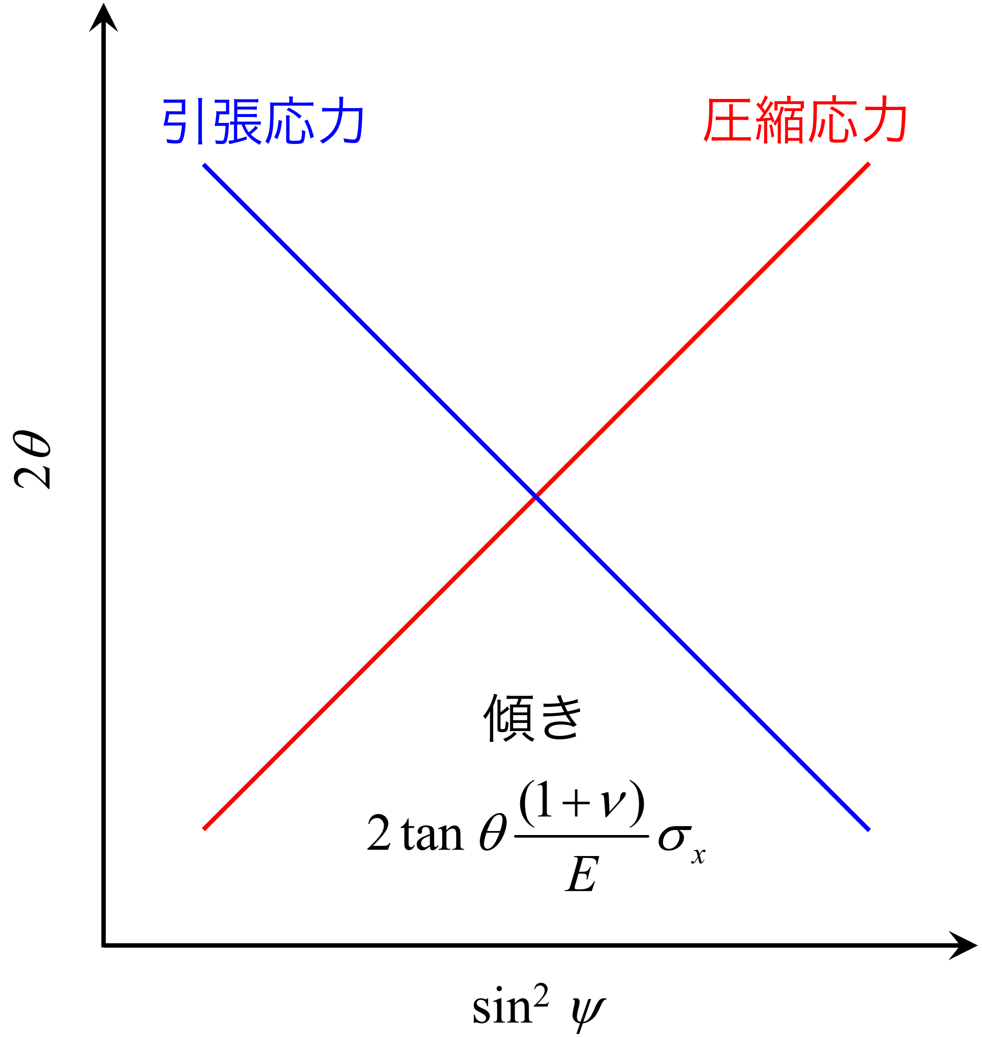
# 5. 材料力学




$\phi\psi$ 方向の歪 $\varepsilon_{\phi\psi}$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\phi\psi} &= \varepsilon_1 \cos^2\phi \sin^2\psi \\
&\quad + \varepsilon_2 \sin^2\phi \sin^2\psi + \varepsilon_3 \cos^2\psi \\
&= (\varepsilon_1 \cos^2\phi + \varepsilon_2 \sin^2\phi)\sin^2\psi \\
&\quad + \varepsilon_3 (1 - \sin^2\psi) \\
&= \varepsilon_x \sin^2\psi + \varepsilon_3 (1 - \sin^2\psi) \\
&= \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E} \sin^2\psi - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\
&\quad + \frac{\nu\sigma_x + \nu\sigma_y}{E} \sin^2\psi \\
&= \frac{1+\nu}{E}\sigma_x \sin^2\psi - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)
\end{aligned}
$$

# 5. 材料力学




$\sigma_x$をX線回折で測定

Braggの式　$2d\sin\theta=\lambda$

$$2\Delta d\sin\theta+2d\cos\Delta\theta=1$$

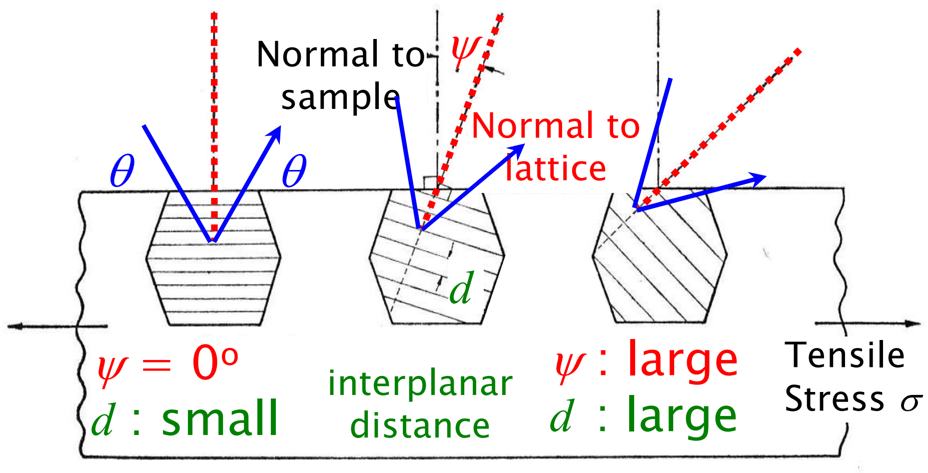
$$\varepsilon_{\phi\psi}=\frac{\Delta d}{d}=\frac{\Delta\theta}{\tan\theta}$$

$$\Delta 2\theta=2\tan\theta\left[\frac{1+\nu}{E}\sigma_x\sin^2\psi-\frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2)\right]$$

$\sin^2\psi$–$2\theta$図の傾きから$\sigma_x$が求められる。

# 5. 材料力学

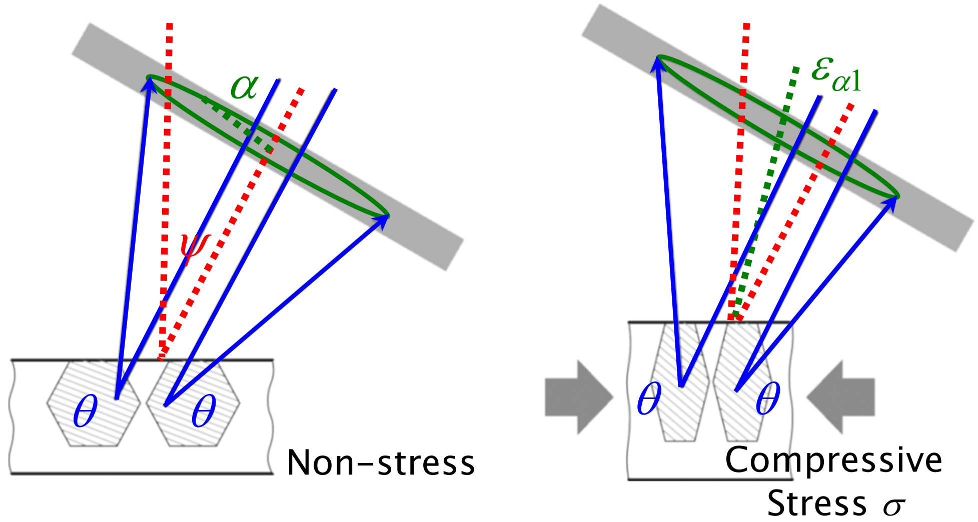
## sin² ψ 法




$\sin^2\psi$–$\Delta 2\theta$ 図の傾きから内部応力 $\sigma_x$ を算出

$$\Delta 2\theta = 2\tan\theta\left[\frac{1+\nu}{E}\sigma_x \sin^2\psi - \frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2)\right]$$

## cos α 法




$\cos\alpha$–$\varepsilon_{\alpha 1}$ 図の傾きから内部応力 $\sigma_x$ を算出

$$\Delta\varepsilon_{\alpha 1} = -\sin 2\theta \sin 2\psi \frac{1+\nu}{E}\sigma_x \cos\alpha$$

$$\left(\varepsilon_{\alpha 1} \equiv \frac{(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\pi+\alpha}) + (\varepsilon_{-\alpha} - \varepsilon_{\pi-\alpha})}{2}\right)$$

# 5. 材料力学

長さ：$l_0$, 幅：$w$

薄膜のヤング率：$E_1$, 熱膨張係数：$\alpha_1$, 厚さ：$t_1$

基板のヤング率：$E_2$, 熱膨張係数：$\alpha_2$, 厚さ：$t_2$

温度が$T_0$から$T_1$に上昇した時の膨張長さ$\Delta l_{\mathrm{T},1}$, $\Delta l_{\mathrm{T},2}$

$$\Delta l_{\mathrm{T},1} = \alpha_1 l_0 (T_1 - T_0)$$

$$\Delta l_{\mathrm{T},2} = \alpha_2 l_0 (T_1 - T_0)$$

引張応力 $F$ を掛けた時の膨張長さ$\Delta l_{\mathrm{F},1}$

$$\frac{F}{wt_1} = E_1 \frac{\Delta l_{F,1}}{l_0} \qquad \Delta l_{F,1} = \frac{Fl_0}{E_1 wt_1}$$

圧縮応力 $F$ を掛けた時の収縮長さ$\Delta l_{\mathrm{F},2}$

$$\frac{F}{wt_2} = E_2 \frac{\Delta l_{F,2}}{l_0} \qquad \Delta l_{F,2} = \frac{Fl_0}{E_2 wt_2}$$

合計の膨張長さ$\Delta l_1$

$$\Delta l_1 = \alpha_1 l_0 (T_1 - T_0) + \frac{Fl_0}{E_1 wt_1}$$

合計の膨張長さ$\Delta l_2$

$$\Delta l_2 = \alpha_2 l_0 (T_1 - T_0) - \frac{Fl_0}{E_2 wt_2}$$

# 5. 材料力学

長さ：$l_0$, 幅：$w$

薄膜のヤング率：$E_1$, 熱膨張係数：$\alpha_1$, 厚さ：$t_1$

基板のヤング率：$E_2$, 熱膨張係数：$\alpha_2$, 厚さ：$t_2$

薄膜と基板は拘束されているので、$\Delta l_1 = \Delta l_2$

$$\alpha_1 l_0 (T_1 - T_0) + \frac{F l_0}{E_1 w t_1} = \alpha_2 l_0 (T_1 - T_0) - \frac{F l_0}{E_2 w t_2}$$

$$F = \frac{w E_1 h_1 E_2 t_2 (\alpha_2 - \alpha_1)(T_1 - T_0)}{E_1 t_1 + E_2 t_2}$$

薄膜： $\sigma_1 = \dfrac{E_1 E_2 t_2 (\alpha_2 - \alpha_1)(T_1 - T_0)}{E_1 t_1 + E_2 t_2}$ （$\alpha_1 < \alpha_2$：引張応力）

基板： $\sigma_2 = \dfrac{E_1 E_2 t_1 (\alpha_1 - \alpha_2)(T_1 - T_0)}{E_1 t_1 + E_2 t_2}$ （$\alpha_1 < \alpha_2$：圧縮応力）

# 5. 材料力学

【問題⑨】ヤング率160 GPa, 熱膨張係数12 × 10$^{-6}$ K$^{-1}$, 厚さ300 μmの基板に、ヤング率200 GPa, 熱膨張係数10 × 10$^{-6}$ K$^{-1}$, 厚さ10 μmの薄膜を1673 Kで成膜した。298 Kに降温した時に、薄膜と基板に掛かる熱応力を求めよ。

【正解】

薄膜の熱応力

$$\sigma_1 = \frac{E_1 E_2 t_2 (\alpha_2 - \alpha_1)(T_1 - T_0)}{E_1 t_1 + E_2 t_2}$$

$$= \frac{200\times10^9 \times 160\times10^9 \times 300\times10^{-6} \times (12-10)\times10^{-6} \times (298-1673)}{200\times10^9 \times 10\times10^{-6} + 160\times10^9 \times 300\times10^{-6}}$$

$$= -528\times10^6\ [\mathrm{Pa}] = -528\ [\mathrm{MPa}]$$ ：圧縮応力

【正解のつづき】

基板の熱応力

$$\sigma_2 = \frac{E_1 E_2 t_1 (\alpha_1 - \alpha_2)(T_1 - T_0)}{E_1 t_1 + E_2 t_2}$$

$$= \frac{200\times10^9 \times 160\times10^9 \times 10\times10^{-6} \times (10-12)\times10^{-6} \times (298-1673)}{200\times10^9 \times 10\times10^{-6} + 160\times10^9 \times 300\times10^{-6}}$$

$$= 17.6\times10^6\ [\mathrm{Pa}] = 17.6\ [\mathrm{MPa}]$$ ：引張応力